Люблинская Ирина Ефимовна

ЗАДАЧИ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МЕСТО ТОЧЕК И ТРАЕКТОРИИ

В третьей статье нашего цикла о возможностях программы TI-Nspire CAS читатели ознакомятся с приложением Геометрия (Geometry) и Графики (Graphs) для решения задач на нахождение геометрического места точек и траекторий.

В качестве первого примера рассмотрим задачу о геометрическом месте точек вершины треугольника

а) с постоянной площадью,

б) с постоянным периметром.

В приложении **Геометрия** построим произвольный треугольник и измерим его площадь и периметр (рис. 1).

В программе имеется возможность зафиксировать любое измерение и отследить любой геометрический объект при движении. В первом случае рассмотрим траекторию вершины треугольника *C*, при котором площадь треугольника постоянна. Зафиксируем площадь треугольника и отследим траекторию точки *C* (рис. 2).

При работе на бумаге ученики могут упустить одну из прямых, забыв рассмотреть случай, когда точка *C* находится по другую сторону стороны *AB*. Этого не случится при работе с программой, которая выдаёт две прямые, параллельные стороне *AB*. Для экспериментальной проверки этой гипотезы ученики могут построить прямую, проходящую через точку *C* и параллельную стороне *AB*. При разных положениях точки *C* прямые совпадают со следом точки *C* (рис. 3).

Во втором случае рассмотрим траекторию точки *C* при постоянном периметре. Для этого зафиксируем периметр треугольника и отследим траекторию точки *C*. Как и следовало ожидать, геометрическим местом точек является эллипс с фокальными точками в вершинах *A* и *B* (рис. 4).

В приложении **Геометрия** возможно построение конических сечений, что позволяет ученикам проверить гипотезу о траектории точки *C* экспериментально (рис. 5).

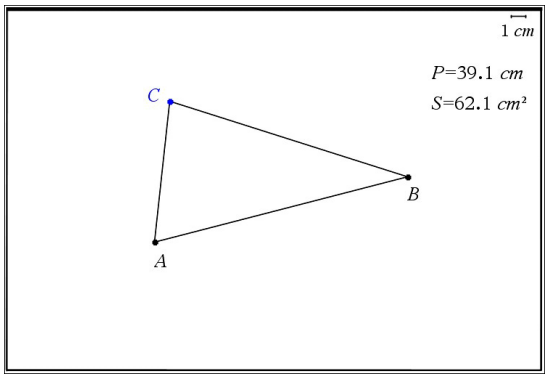


Рис. 1

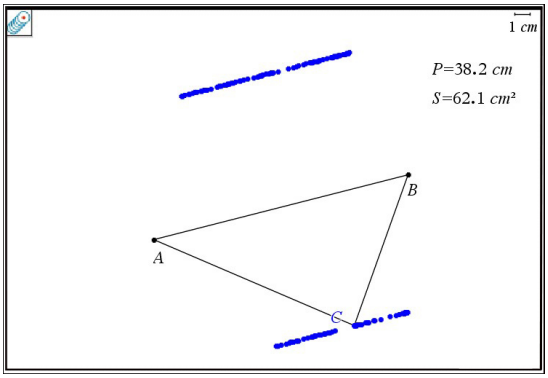
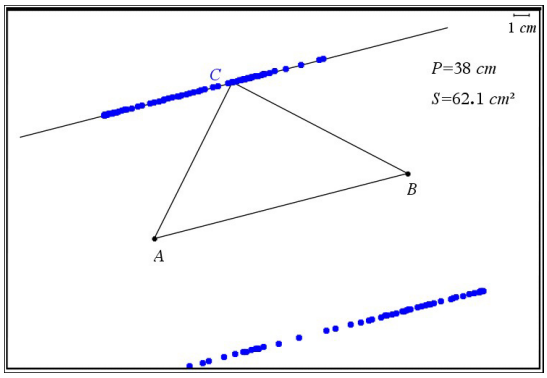


Рис. 2



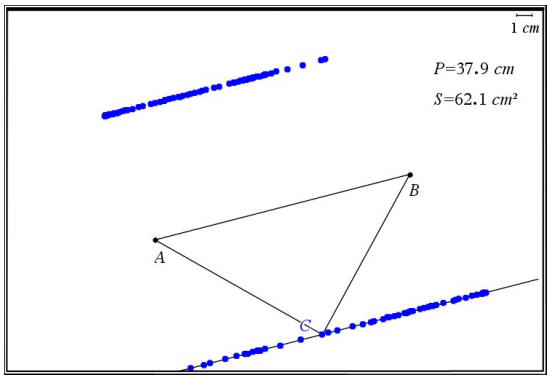


Рис. 3

В обоих случаях ученикам остаётся доказать результаты, показанные программой.

В качестве второго примера рассмотрим следующую задачу: дана окружность с центром в точке O. Из точки Q, находящейся вне окружности, проведена прямая L, пересекающая окружность в точках A и B. По какой траектории движется точка M, являющаяся серединой отрезка AB при повороте прямой L вокруг точки Q?

В данном примере ученики строят окружность и прямую через точку вне окружности. Программа позволяет найти точки пересечения окружности и прямой (точки A и B) и среднюю точку M отрезка AB. Строить отрезок AB при этом необязательно. Выбрав команду отслеживания точки M, ученики поворачивают прямую L. По умолчанию программа поворачивает прямую вокруг точки Q (рис. 6).

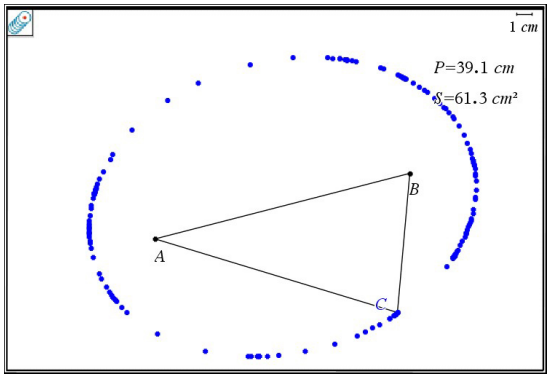


Рис. 4

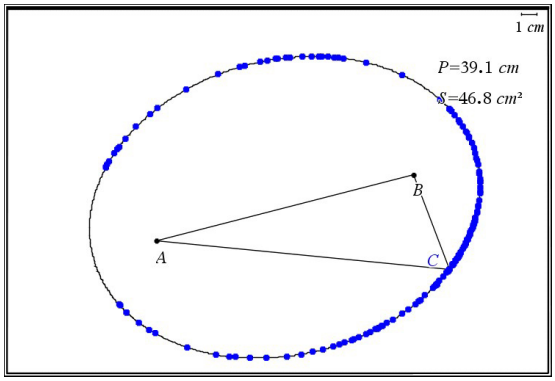
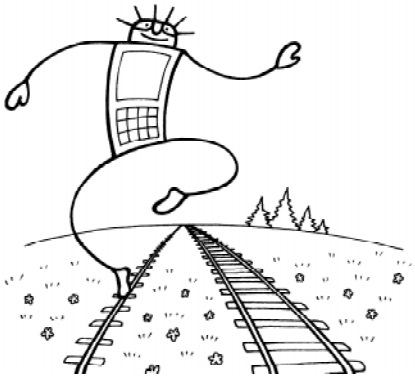


Рис. 5



...выдаёт две прямые, параллельные стороне AB...

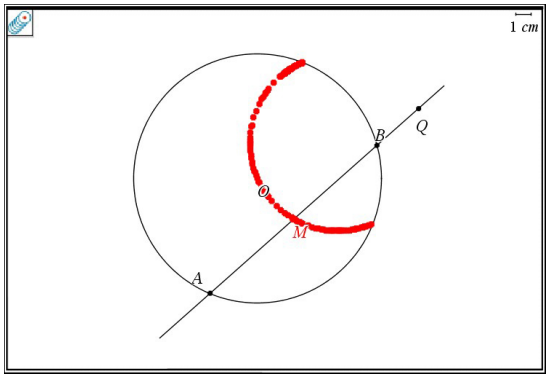


Рис. 6

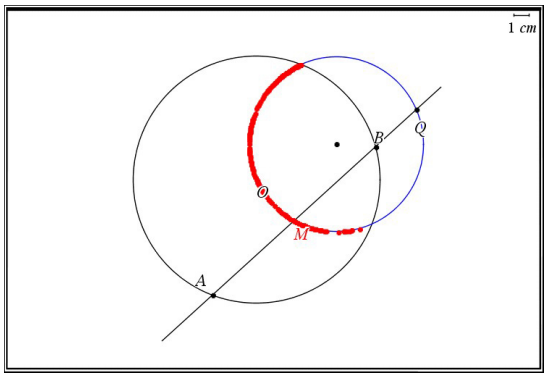
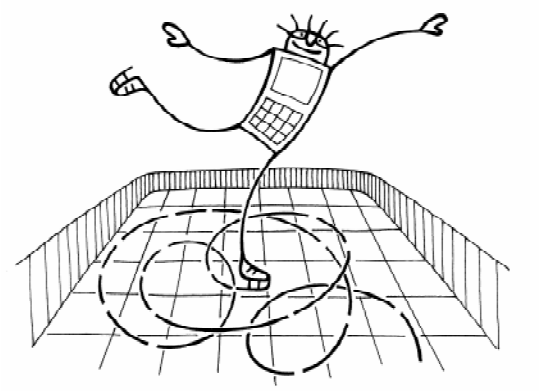


Рис. 7



Многие задачи на траектории удобно решать ... на координатной сетке...

Прежде, чем доказывать, что траекторией точки M является окружность с центром в середине отрезка OQ и диаметром OQ, ученики могут проверить гипотезу о форме траектории путём построения. Для этого используются команды нахождения средней точки и построения окружности (рис. 7).

В первых двух примерах мы использовали команду отслеживания для нахождения траекторий точек в приложении **Геометрия**. Одним из преимуществ программы TI-Nspire CAS является то, что все геометрические команды и построения доступны как в приложении **Геометрия** (на Евклидовой плоскости), так и в приложении **Графики** (на координатной сетке). Многие задачи на траектории удобно решать при помощи координатного метода на координатной сетке и поэтому удобнее пользоваться, приложением **Графики**. В качестве иллюстрации координатного метода решения задач на траектории в следующих двух примерах мы используем приложение **Графики** с изотропной сеткой координат. Дополнительно траектории движения точек будут построены при помощи команды нахождения геометрического места точек, вместо команды отслеживания.

Рассмотрим следующую задачу: дана точка A вне данной прямой и точка B на прямой. Точка C выбирается так, чтобы $AB \perp BC$ и $AB = BC$. По какой траектории движется точка C при движении точки B вдоль данной прямой?

Для простоты в качестве данной прямой выберем ось абсцисс. Построим отрезок AB с точкой A на оси ординат и точкой B на оси абсцисс. Точку C, удовлетворяющую условиям задачи, можно построить разными способами. Для иллюстрации возможностей программы воспользуемся преобразованием поворота. Повернём отрезок AB на 90° по часовой стрелке (на угол –90°) вокруг точки B. Образом точки A будет точка C (рис. 8).

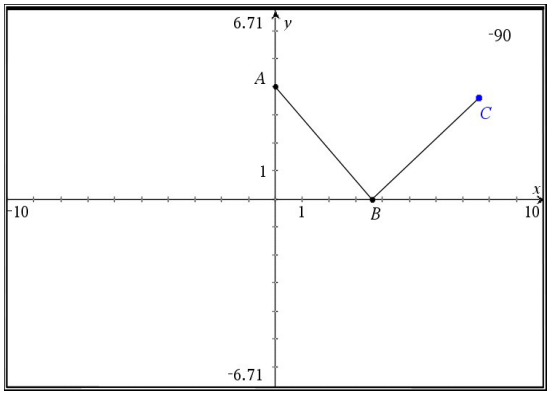


Рис. 8

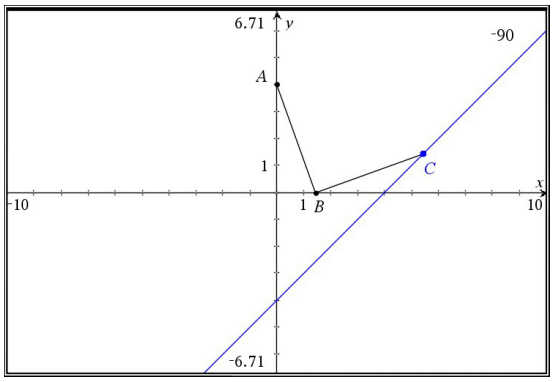


Рис. 9

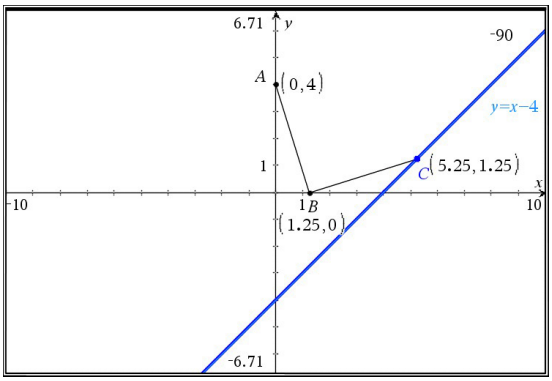


Рис. 10

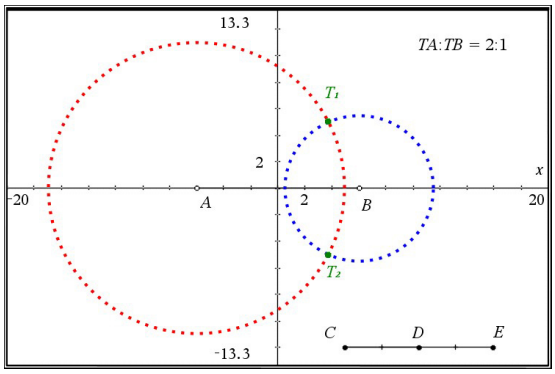


Рис. 11

Используя команду нахождения геометрического места точки C при движении точки B по оси абсцисс, сразу получаем траекторию – прямую (рис. 9).

Ученики могут измерить координаты точек A, B и C. Наблюдая за координатами точек при движении точки B, а также меняя положение точки A, ученики могут найти уравнение прямой и проверить это уравнение экспериментально, построив график линейной функции, совпадающей с данной прямой (рис. 10).

Для вывода уравнения полученной прямой ученики могут использовать свойства поворота для нахождения координат точек.

В качестве последнего примера рассмотрим классическую задачу о преследовании: катер береговой охраны преследует моторную лодку браконьеров. И катер и моторная лодка движутся по прямой. Вышли они одновременно (разумеется, не из одного места). Скорость катера в 2 раза больше скорости моторной лодки. В какой точке катер догонит моторную лодку? Геометрическая формулировка задачи: дан отрезок AB. Каково множество точек T, таких что $TA : TB = 2 : 1$?

Для простоты построим отрезок AB на оси абсцисс так, чтобы начало координат было в середине отрезка. Для построения окружностей с центрами в точках A и B и отношением радиусов 2 : 1, сначала построим отрезок CE переменной длины с серединой в точке D.

Для построения окружностей с данным центром и радиусом в этом случае можно воспользоваться циркулем. Построим две окружности, первую с центром в точке A и радиусом CE и вторую с центром в точке B и радиусом CD. Катер догонит моторную лодку в точках пересечения двух окружностей, T_1 и T_2 (рис. 11).

При перемещении точки E радиусы окружностей меняются и соответственно меняются положения точек пересечения T_1 и T_2. Используя команду нахождения геомет-

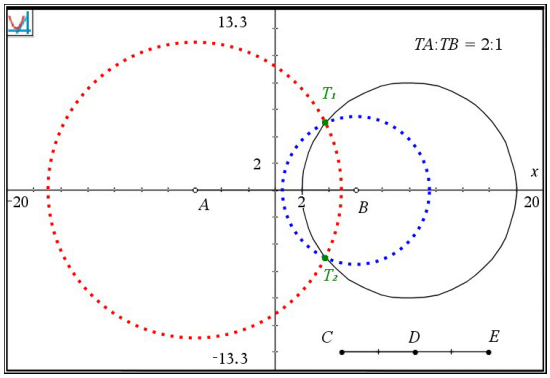


Рис. 12

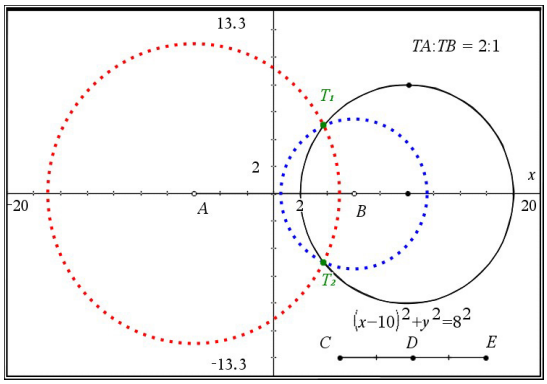


Рис. 13

рического множества точек, находим траектории для точек пересечения (рис. 12).

По внешнему виду траекторией является окружность. На данном этапе у учеников есть несколько возможностей проверить этот факт экспериментально и найти уравнение окружности. Они могут построить окружность, совпадающую с траекторией, как геометрический объект и попросить программу найти уравнение для построенной окружности (рис. 13).

Одновременно ученики могут найти уравнение окружности аналитически и построить график уравнения, используя имеющийся шаблон для построения уравнения окружности с заданным центром и радиусом (рис. 14).

Используя координатный метод, ученики затем доказывают верность полученного уравнения.

Как проиллюстрировано в приведённых примерах, роль программы заключается в том, чтобы помочь ученикам представить геометрическую задачу визуально и построить гипотезу. Проведение построений в программе и экспериментальная проверка гипотез может помочь ученикам сформулировать доказательство полученных результатов.

Документ с готовыми построениями и видео ***Геометрическое_место_точек.tns***, демонстрирующий как создание, так и функциональность каждого примера, можно найти на приложенном к журналу компакт-диске. Демонстрационные версии программы можно загрузить по следующим ссылкам:

· 90-дневная версия учителя, http://education.ti.com/calculators/downloads/EE/Software/Detail?id=6860.

· 30-дневная версия ученика, http://education.ti.com/calculators/downloads/EE/Software/Detail?id=6770.

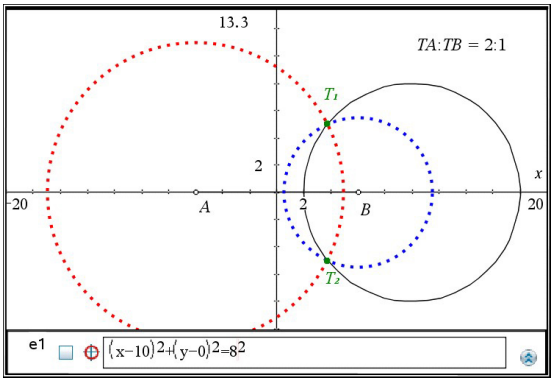


Рис. 14

Irina Lyublinskaya,
Ph.D., Professor of Mathematics and Science Education, College of Staten IslandCollege of Staten Island, City University of New York, USA.